

LES PUISSANCES

I. Les puissances de dix

Définition :

Soit n un entier positif.

On note 10^n le nombre $\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_n$, c'est-à-dire le produit de n facteurs égaux à 10 :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_n = \underbrace{1000 \dots 000}_{n \text{ zéros}} \quad (\text{le nombre } n \text{ est appelé } \mathbf{\textit{exposant}})$$

Exemple : $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

Remarques : Un million se note 10^6 et un milliard se note 10^9 .

$$1000 = 10^3$$

$$100 = 10^2$$

$$10 = 10^1$$

Ainsi :

$$1 = 10^0$$

Par convention, on convient que : $10^0 = 1$.

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10^{-1}$$

Définition :

Soit n un entier positif non nul.

On note 10^{-n} l'inverse de 10^n :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{000 \dots 001}_{n \text{ chiffres}}.$$

Exemples : $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^{-5} = 0,00001$$

5 chiffres

II. Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier positif

Définition :

Soit a un nombre relatif et n un entier positif non nul.

On note a^n , le nombre $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$, c'est-à-dire le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

Exemples : $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

$$(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Par convention, si $a \neq 0$: $a^0 = 1$. $\rightarrow 7^0 = 1$

Remarque : Une puissance s'adresse au symbole qui la précède : $(-8)^0 = 1$ $-8^0 = -1$

Attention !

- Il ne faut pas confondre 5^3 et 5×3 ! $\rightarrow 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ et $5 \times 3 = 15$
- Il ne faut pas confondre 3^4 et 4^3 ! $\rightarrow 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ et $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- Il ne faut pas confondre $(-3)^4$ et -3^4 !
 $\rightarrow (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$ et $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$

Remarques :

- 1) Pour tout a , $a^1 = a \rightarrow 7^1 = 7$
- 2) **Les puissances d'exposants pairs sont toujours positives**
 $(-8)^{42}$ est positif $\rightarrow (-8)^{42} = 8^{42}$

III. Puissances entières d'un nombre relatif : exposant entier négatif

Définition :

Soit a un nombre relatif non nul et n un entier non nul.

On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n}$

Exemples : 2^{-3} est l'inverse de 2^3 $\rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3) \times (-3)} = \frac{1}{9}$$

Cas particulier, si $a \neq 0$: a^{-1} est l'inverse de a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$\rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5} \quad , \quad (-6)^{-1} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

Attention !

Le nombre 2^{-3} n'est pas égal à 0,002! $\rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8} = 0,125$

IV. Notation scientifique d'un nombre

Propriété : Un nombre décimal admet plusieurs écritures de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a désigne un nombre décimal et n un entier relatif.

$$3\,750\,000 = 3\,750 \times 10^3$$

$$0,004\,25 = 425 \times 10^{-5}$$

$$= 375 \times 10^4$$

$$= 42,5 \times 10^{-4}$$

Exemples :

$$= 3,75 \times 10^6$$

$$= 4,55 \times 10^{-3}$$

$$= 0,375 \times 10^7$$

$$= 0,425 \times 10^{-2}$$

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre est la seule écriture de la forme $a \times 10^p$ dans laquelle a s'écrit avec un seul chiffre avant la virgule, a étant différent de 0.

Exemples : L'écriture scientifique de 3 750 000 est $3,75 \times 10^6$
 L'écriture scientifique de 0,004 25 est $4,55 \times 10^{-3}$
 L'écriture scientifique de -25 000 000 000 est $-2,5 \times 10^{10}$

V. Règles de calcul

1. Les puissances de 10

Quelques exemples de calculs :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^2 \times 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ $= 10\,000\,000$ $= 10^6$	$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ $= 0,001$ $= 10^{-3}$	$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$ $= 10 \times 10 \times 10$ $= 10^3$	$(10^4)^2 = (10 \times 10 \times 10 \times 10)^2$ $= 10\,000^2$ $= 100\,000\,000$ $= 10^8$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$	$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$(10^m)^n = 10^{m \times n}$
$10^2 \times 10^4 = 10^6$	$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$	$\frac{10^5}{10^2} = 10^3$	$(10^4)^2 = 10^8$

2. Les puissances de nombres relatifs

Quelques exemples de calculs :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
---------	---------	----------	------------------------

$4^2 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $= 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = \frac{(-3) \times (-3) \times (-3)}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3)^2}$ $= (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = \frac{1}{(6^3)^2}$ $= \frac{1}{(6 \times 6 \times 6)^2}$ $= \frac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}$ $= \frac{1}{6^6} = 6^{-6}$
---	--------------------------	--	---

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$4^2 \times 4^3 = 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{3-5} = (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = 6^{3 \times (-2)} = 6^{-6}$

Attention !

Il ne faut pas confondre $10^2 + 10^3$ avec 10^5 !
 $\rightarrow 10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$ et $10^5 = 100000$

Il ne faut pas confondre $10^4 + 10^4$ avec 20^4 !
 $\rightarrow 10^4 + 10^4 = 20000$ et $20^4 = 160000$

3. Règles de priorité

Propriété :

Quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions

Exemples : $11 \times (8 + 3)^5 = 11 \times 11^5 = 11^6$
 $7 - 5 \times 4^2 = 7 - 5 \times 16 = 7 - 80 = -73$

Propriété :

Pour deux nombres a et b non nuls, on a :

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Ainsi : $(a \times b)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2 \times b^2$

$$(3x)^2 = 3x \times 3x$$

$$= 3 \times x \times 3 \times x$$

$$= 3 \times 3 \times x \times x \rightarrow \text{ainsi : } (3x)^2 \neq 3x^2,$$

$$= 9x^2$$

Exemples : $(2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4,$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3},$$

Exercice : Soit $A = 4 \times 10^5$ et $B = 5 \times 10^{-3}$,

Calculer $A + B$ puis $A \times B$ et donner chaque résultat en écriture scientifique.

$$A \times B = (4 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-3})$$

$$= 4 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}$$

$$= 4 \times 5 \times 10^5 \times 10^{-3}$$

$$= 20 \times 10^2$$

$$= 2 \times 10 \times 10^2$$

$$= 2 \times 10^3$$

$$\frac{A}{B} = \frac{4 \times 10^5}{5 \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{10^5}{10^{-3}}$$

$$= 0,8 \times 10^8$$

$$= 0,8 \times 10 \times 10^7$$

$$= 8 \times 10^7$$

VI. Règles de calcul

1. Les puissances de 10

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^2 \times 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ $= 1000000$ $= 10^6$	$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ $= 0,001$ $= 10^{-3}$	$\frac{10^5}{10^2} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$ $= 10 \times 10 \times 10$ $= 10^3$	$(10^4)^2 = (10 \times 10 \times 10 \times 10)^2$ $= 10000^2$ $= 100000000$ $= 10^8$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$	$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$	$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$(10^m)^n = 10^{m \times n}$
$10^2 \times 10^4 = 10^6$	$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$	$\frac{10^5}{10^2} = 10^3$	$(10^4)^2 = 10^8$

2. Les puissances de nombres relatifs

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$4^2 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $= 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = \frac{(-3) \times (-3) \times (-3)}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3) \times (-3)}$ $= \frac{1}{(-3)^2}$ $= (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = \frac{1}{(6^3)^2}$ $= \frac{1}{(6 \times 6 \times 6)^2}$ $= \frac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}$ $= \frac{1}{6^6} = 6^{-6}$

REGLES DE CALCUL :

Produit	Inverse	Quotient	Puissance de puissance
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$4^2 \times 4^3 = 4^5$	$\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$	$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{3-5} = (-3)^{-2}$	$(6^3)^{-2} = 6^{3 \times (-2)} = 6^{-6}$

Attention !

Il ne faut pas confondre $10^2 + 10^3$ avec 10^5 !

$$\rightarrow 10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100 \text{ et } 10^5 = 100000$$

Il ne faut pas confondre $10^4 + 10^4$ avec 20^4 !

$$\rightarrow 10^4 + 10^4 = 20000 \text{ et } 20^4 = 160000$$

3. Règles de priorité

Propriété :

Quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions

Exemples : $11 \times (8 + 3)^5 = 11 \times 11^5 = 11^6$
 $7 - 5 \times 4^2 = 7 - 5 \times 16 = 7 - 80 = -73$

Propriété :

Pour deux nombres a et b non nuls, on a :

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Ainsi : $(a \times b)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2 \times b^2$

$$(3x)^2 = 3x \times 3x$$

$$= 3 \times x \times 3 \times x$$

$$= 3 \times 3 \times x \times x \rightarrow \text{ainsi : } (3x)^2 \neq 3x^2,$$

$$= 9x^2$$

Exemples : $(2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4,$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3},$$

Exercice : Soit $A = 4 \times 10^5$ et $B = 5 \times 10^{-3}$,

Calculer $A + B$ puis $A \times B$ et donner chaque résultat en écriture scientifique.

$$A \times B = (4 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-3})$$

$$= 4 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}$$

$$= 4 \times 5 \times 10^5 \times 10^{-3}$$

$$= 20 \times 10^2$$

$$= 2 \times 10 \times 10^2$$

$$= 2 \times 10^3$$

$$\frac{A}{B} = \frac{4 \times 10^5}{5 \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{10^5}{10^{-3}}$$

$$= 0,8 \times 10^8$$

$$= 0,8 \times 10 \times 10^7$$

$$= 8 \times 10^7$$